

» LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XXI:

¿Qué es el cálculo difere

José Francisco Gómez Aguilar
CONACyT-Tecnológico Nacional de México/CENIDET
Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos.

Esta publicación fue revisada por el comité editorial de la Academia de Ciencias de Morelos.

Las matemáticas son una herramienta con muchas aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia y las ingenierías y nos han ayudado a lograr el desarrollo tecnológico que tenemos actualmente. La descripción de los fenómenos que podemos observar en la vida cotidiana, se logra en gran parte por el análisis matemático y modelos que nos permitan la predicción de dichos fenómenos. Para lograr esto, algunos investigadores construyen modelos matemáticos usando ecuaciones diferenciales e integrales. Estas ecuaciones relacionan funciones que usualmente representan cantidades físicas y sus razones de cambio. Esto significa que miden cómo una variable se modifica con respecto a otra. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la ganancia al invertir un peso durante un año, con alguna tasa anual de interés. Con los cálculos adecuados, podemos saber la ganancia por cada año, o bien cada mes, o cada día. Pero imaginemos si queremos saber la ganancia por cada hora, o cada minuto, o incluso cada segundo y cada centésima de segundo o en fracciones de segundo. Esto lo podríamos calcular con una ecuación diferencial. Durante los estudios de licenciatura y posgrado en el área de las matemáticas, se estudian varios métodos de cómo resolver estas ecuaciones. Esto permite introducir técnicas analíticas y numéricas más sofisticadas para resolver modelos matemáticos que surgen en varios campos de la ciencia, la tecnología y la ingeniería. Uno de estos métodos es el *cálculo diferencial e integral de orden arbitrario*.

Un poco de historia: ¿Qué es el

cálculo diferencial e integral de orden arbitrario?

El cálculo fraccionario es una rama del análisis matemático que se encarga del estudio de los operadores (objeto matemático que convierte una función en otra). Los operadores más básicos son los de suma (+), resta (-), multiplicación (x) y división (÷) y que se usan con números para realizar operaciones matemáticas en la forma que prácticamente todos conocemos. Sin embargo, los operadores para la integración y diferenciación de orden arbitrario puede tomar cualquier valor, real, imaginario, o incluso una función dentro de los cuales, no sólo es posible considerar órdenes racionales, sino también, órdenes de tipo real e incluso complejo o variantes en el tiempo y/o espacio. Por lo tanto, nos permiten realizar operaciones mucho más complejas como las que serán explicadas más adelante.

Tras los primeros pasos de Leibniz y L'Hôpital, quienes fueron grandes matemáticos que publicaron las primeras ecuaciones de cálculo fraccionario, se ha ido observando un desarrollo continuo. Destacan principalmente las aportaciones en el siglo XVIII de Euler y Lagrange, quienes hicieron los primeros aportes teóricos. A mediados del siglo XIX los primeros estudios sistemáticos parecen proceder de Riemann, Liouville, Laplace y Holmgren. Liouville publica un gran número de artículos en los que busca proporcionar una primera definición formal de derivada e integral fraccionaria, por lo que se le considera el creador de las bases del cálculo fraccionario. Es de destacar que, en 1819, la primera discusión acerca de una derivada fraccionaria aparece en el texto de cálculo de Lacroix, quien aparentemente lo consideró como un ejercicio matemático. Por otro lado, en 1823 la primera aplicación vino por parte de Abel en la solución de una ecuación integral para el problema de la *tautócrona*. El problema consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, tal que un objeto, al deslizarse sin fricción sobre ella,



FIGURA 1. IMAGEN obtenida de la base de segmentación de Berkeley. Tomada de: D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, "A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics," in Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision, vol. 2, July 2001, pp. 416-423.

llegue al final de su recorrido en un tiempo que sea independiente del lugar en que comience el movimiento. En el siglo XX, las principales aportaciones al cálculo fraccionario fueron por parte de Hardy, Littlewood, Erédy y Riesz. En 1974, surge el primer libro dedicado exclusivamente al estudio del cálculo fraccionario, el cual es escrito y publicado por Oldham y Spanier.

Entonces, el cálculo de orden fraccionario es una rama del análisis matemático que puede considerarse tan antigua como el cálculo de orden entero (el que nos permite describir tasas de cambio y el área bajo una curva). Sin embargo, tenía la reputación de ser una teoría matemática sin aplicaciones, pero a partir de la década de los 70's (del siglo pasado), el cálculo de orden fraccionario ha logrado un considerable desarrollo. De primera instancia, esto se ve reflejado en la gran cantidad de trabajos publicados respecto a este tema, libros especializados, conferencias internacionales, paquetes de software y grupos de investigación que utilizan el cálculo de orden fraccionario para la búsqueda de aplicaciones que tiene en los diferentes campos de la ciencia, tales como, física, biología, economía, medicina, entre otras áreas. De esta manera, el cálculo de orden fraccionario o de orden arbitrario es un instrumento de modelación de sistemas del mundo real. Al ser algo relativamente reciente, puede decirse que esta rama del análisis matemático es también una nueva disciplina.

¿Qué ventajas ofrece esta nueva disciplina?

El uso de derivadas de orden fraccionario ofrece varias ventajas que son aprovechadas para resolver ciertos problemas:

- 1) Ofrece la libertad de elegir el orden de diferenciación a fin de ajustar

a los datos experimentales o tomar en cuenta la complejidad del entorno o medio y como caso particular siempre se puede recuperar el operador de derivación o integración clásico.

2) Debido a que se han desarrollado progresivamente muchas definiciones de derivada fraccionaria, se puede elegir la definición más adecuada de acuerdo a la naturaleza del fenómeno en estudio, como los materiales viscoelásticos, el fenómeno de la difusión anómala, la teoría electromagnética (ondas), la economía, la teoría de circuitos, la biología (como el modelado del crecimiento de tumores, modelos de crecimiento poblacional, dinámica de epidemias o poblaciones) o de la física de la atmósfera. Con estos cálculos se puede obtener una mejor optimización de los datos experimentales, para generar modelos matemáticos que describan a los sistemas, particularmente de fenómenos cuyos modelos clásicos o de orden entero no satisfacen los datos experimentales, por ejemplo fenómenos de transporte (difusión anómala, sub-difusión y super-difusión), superconductividad, propagación del cáncer, entre otros.

3) Las derivadas fraccionarias poseen las propiedades de no-localidad y memoria. Es decir, podemos hablar de no localidad cuando lo que ocurre en un instante de tiempo o en algún punto del espacio depende del promedio en un intervalo que contiene al instante de tiempo o al punto del espacio. En este sentido, los efectos no locales en el tiempo se conocen como efectos con memoria, ya que consideran varias escalas de tiempo y los efectos no locales en el espacio pueden definirse como interacciones de largo alcance ya que consideran varias escalas espaciales.

4) El cálculo fraccionario, al estar ligado a la teoría de los fractales, genera parámetros y dimensio-

Formulario para Cálculo Diferencial

$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$	$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^3} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{d}{dx} x^{-1} = -x^{-2}$	$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$	$\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4}$	$\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5}$
$\frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6}$	$\frac{d}{dx} x^{-6} = -6x^{-7}$	$\frac{d}{dx} x^{-7} = -7x^{-8}$	$\frac{d}{dx} x^{-8} = -8x^{-9}$
$\frac{d}{dx} x^{-9} = -9x^{-10}$	$\frac{d}{dx} x^{-10} = -10x^{-11}$	$\frac{d}{dx} x^{-11} = -11x^{-12}$	$\frac{d}{dx} x^{-12} = -12x^{-13}$
$\frac{d}{dx} x^{-13} = -13x^{-14}$	$\frac{d}{dx} x^{-14} = -14x^{-15}$	$\frac{d}{dx} x^{-15} = -15x^{-16}$	$\frac{d}{dx} x^{-16} = -16x^{-17}$
$\frac{d}{dx} x^{-17} = -17x^{-18}$	$\frac{d}{dx} x^{-18} = -18x^{-19}$	$\frac{d}{dx} x^{-19} = -19x^{-20}$	$\frac{d}{dx} x^{-20} = -20x^{-21}$
$\frac{d}{dx} x^{-21} = -21x^{-22}$	$\frac{d}{dx} x^{-22} = -22x^{-23}$	$\frac{d}{dx} x^{-23} = -23x^{-24}$	$\frac{d}{dx} x^{-24} = -24x^{-25}$
$\frac{d}{dx} x^{-25} = -25x^{-26}$	$\frac{d}{dx} x^{-26} = -26x^{-27}$	$\frac{d}{dx} x^{-27} = -27x^{-28}$	$\frac{d}{dx} x^{-28} = -28x^{-29}$
$\frac{d}{dx} x^{-29} = -29x^{-30}$	$\frac{d}{dx} x^{-30} = -30x^{-31}$	$\frac{d}{dx} x^{-31} = -31x^{-32}$	$\frac{d}{dx} x^{-32} = -32x^{-33}$
$\frac{d}{dx} x^{-33} = -33x^{-34}$	$\frac{d}{dx} x^{-34} = -34x^{-35}$	$\frac{d}{dx} x^{-35} = -35x^{-36}$	$\frac{d}{dx} x^{-36} = -36x^{-37}$
$\frac{d}{dx} x^{-37} = -37x^{-38}$	$\frac{d}{dx} x^{-38} = -38x^{-39}$	$\frac{d}{dx} x^{-39} = -39x^{-40}$	$\frac{d}{dx} x^{-40} = -40x^{-41}$
$\frac{d}{dx} x^{-41} = -41x^{-42}$	$\frac{d}{dx} x^{-42} = -42x^{-43}$	$\frac{d}{dx} x^{-43} = -43x^{-44}$	$\frac{d}{dx} x^{-44} = -44x^{-45}$
$\frac{d}{dx} x^{-45} = -45x^{-46}$	$\frac{d}{dx} x^{-46} = -46x^{-47}$	$\frac{d}{dx} x^{-47} = -47x^{-48}$	$\frac{d}{dx} x^{-48} = -48x^{-49}$
$\frac{d}{dx} x^{-49} = -49x^{-50}$	$\frac{d}{dx} x^{-50} = -50x^{-51}$	$\frac{d}{dx} x^{-51} = -51x^{-52}$	$\frac{d}{dx} x^{-52} = -52x^{-53}$
$\frac{d}{dx} x^{-53} = -53x^{-54}$	$\frac{d}{dx} x^{-54} = -54x^{-55}$	$\frac{d}{dx} x^{-55} = -55x^{-56}$	$\frac{d}{dx} x^{-56} = -56x^{-57}$
$\frac{d}{dx} x^{-57} = -57x^{-58}$	$\frac{d}{dx} x^{-58} = -58x^{-59}$	$\frac{d}{dx} x^{-59} = -59x^{-60}$	$\frac{d}{dx} x^{-60} = -60x^{-61}$
$\frac{d}{dx} x^{-61} = -61x^{-62}$	$\frac{d}{dx} x^{-62} = -62x^{-63}$	$\frac{d}{dx} x^{-63} = -63x^{-64}$	$\frac{d}{dx} x^{-64} = -64x^{-65}$
$\frac{d}{dx} x^{-65} = -65x^{-66}$	$\frac{d}{dx} x^{-66} = -66x^{-67}$	$\frac{d}{dx} x^{-67} = -67x^{-68}$	$\frac{d}{dx} x^{-68} = -68x^{-69}$
$\frac{d}{dx} x^{-69} = -69x^{-70}$	$\frac{d}{dx} x^{-70} = -70x^{-71}$	$\frac{d}{dx} x^{-71} = -71x^{-72}$	$\frac{d}{dx} x^{-72} = -72x^{-73}$
$\frac{d}{dx} x^{-73} = -73x^{-74}$	$\frac{d}{dx} x^{-74} = -74x^{-75}$	$\frac{d}{dx} x^{-75} = -75x^{-76}$	$\frac{d}{dx} x^{-76} = -76x^{-77}$
$\frac{d}{dx} x^{-77} = -77x^{-78}$	$\frac{d}{dx} x^{-78} = -78x^{-79}$	$\frac{d}{dx} x^{-79} = -79x^{-80}$	$\frac{d}{dx} x^{-80} = -80x^{-81}$
$\frac{d}{dx} x^{-81} = -81x^{-82}$	$\frac{d}{dx} x^{-82} = -82x^{-83}$	$\frac{d}{dx} x^{-83} = -83x^{-84}$	$\frac{d}{dx} x^{-84} = -84x^{-85}$
$\frac{d}{dx} x^{-85} = -85x^{-86}$	$\frac{d}{dx} x^{-86} = -86x^{-87}$	$\frac{d}{dx} x^{-87} = -87x^{-88}$	$\frac{d}{dx} x^{-88} = -88x^{-89}$
$\frac{d}{dx} x^{-89} = -89x^{-90}$	$\frac{d}{dx} x^{-90} = -90x^{-91}$	$\frac{d}{dx} x^{-91} = -91x^{-92}$	$\frac{d}{dx} x^{-92} = -92x^{-93}$
$\frac{d}{dx} x^{-93} = -93x^{-94}$	$\frac{d}{dx} x^{-94} = -94x^{-95}$	$\frac{d}{dx} x^{-95} = -95x^{-96}$	$\frac{d}{dx} x^{-96} = -96x^{-97}$
$\frac{d}{dx} x^{-97} = -97x^{-98}$	$\frac{d}{dx} x^{-98} = -98x^{-99}$	$\frac{d}{dx} x^{-99} = -99x^{-100}$	$\frac{d}{dx} x^{-100} = -100x^{-101}$

$$\int_{-1}^7 (|x - 2| - 3) dx$$

Referencias

R. Gorenflo, F. Mainardi. Fractional Calculus, Integral and Differentia A.L. Ozores. Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana, Revista Per L.Y. Medina, F. Cabrera. Aplicación del cálculo fraccional a la pérdida C.A. Monje, Y. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Felii. Fractional-order K. Oldham, J. Spanier. The fractional calculus theory and application: D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, A database of human seg logical statistics, in Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision, vol. 2, July



ESTA PUBLICACIÓN FUE REVISADA POR EL COMITÉ EDITORIAL DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS

Para actividades recientes de la academia y artículos anteriores puede consultar: www.acmor.org.mx
¿Comentarios y sugerencias?, ¿Preguntas sobre temas científicos? CONTACTANOS: editorial@acmor.org.mx

¿Diferencial e integral de orden arbitrario?

nes de orden intermedio. Esto permite conseguir una mejor modelización en las diferentes aplicaciones físicas.

En particular, las propiedades de no-localidad y memoria dentro de los modelos que involucran ecuaciones diferenciales de orden fraccionario suelen representar de mejor manera la evolución temporal de muchos procesos físicos, la dinámica de sistemas complejos y la dinámica en medios heterogéneos que los de orden entero o clásicos. Por ello su exitosa aplicación en áreas como teoría del transporte, electromagnetismo, teoría de señales, viscoelasticidad, teoría del caos o fractales, teoría de materiales.

Por ejemplo, el uso de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en el estudio de las aleaciones con memoria de forma, es de gran utilidad debido a la alta complejidad del enlace entre los comportamientos macroscópicos y microscópicos. Con otros métodos no se han podido obtener modelos realmente fiables y adecuados para describir estos comportamientos. Sin embargo, debido a que los operadores de orden no entero permiten representar en forma más adecuada sistemas complejos, los modelos basados en estos operadores han permitido entender estos comportamientos y la interacción existente entre tensión, deformación y temperatura.

No obstante, el empleo de derivadas fraccionarias en la representación de ecuaciones diferenciales suele dificultar los cálculos empleados para determinar la solución analítica de los modelos resultantes. Esto debido a que la cantidad de términos a manipular suele incrementarse considerablemente respecto a la representación clásica de estos sistemas. Debido a ello, es común recurrir a la solución numérica de estos sistemas. Además, la interpretación física y

geométrica de una derivada y/o integral fraccionaria no está completamente establecida de la misma forma que las de orden entero. Así que esto, abre la posibilidad de seguir trabajando y fortaleciendo esta rama del análisis matemático. A continuación, describiremos una aplicación donde hemos empleado operadores de derivación e integración de orden fraccionario con interesantes resultados.

Detección de Bordes en imágenes

Una imagen digital está compuesta por puntos o elementos llamados píxeles y en una imagen en escala de grises, el valor de cada píxel puede estar representado con cualquier número entre 0 y 255. En el procesamiento de imágenes, se puede mejorar la calidad de las características en las imágenes para su adecuada interpretación. Para ello, una de las técnicas utilizadas es la detección de bordes. Esta técnica permite identificar puntos en una imagen digital donde el brillo de la imagen cambia bruscamente. Los bordes son aquellas zonas en las que se produce un fuerte cambio de intensidad luminosa. Por otro lado, en el cambio de intensidad se pueden identificar píxeles con alta variación en escala de grises en la imagen a procesar. Esto permite realizar la detección de bordes (la cual es una técnica que permite encontrar los límites de los objetos), contornos o esquinas utilizando diferentes algoritmos de detección de orden entero, entre los cuales se encuentran: Roberts, Prewitt, Sobel, Canny y Laplaciano del Gaussiano. En este sentido, los modelos de orden fraccionario pueden resaltar características y/o bordes en imágenes con mayor precisión, a diferencia de los descritos por derivadas de orden entero. Para imágenes en escala de grises, los valores de nivel de grises entre píxeles vecinos tienen una alta correlación. Debido a esto, podemos aplicar una derivada fraccionaria para mejorar los detalles de textura para los valores de nivel de gris adyacentes. Esto permite preservar las características de las imágenes cuando existen cambios en los niveles de grises. A continuación, podemos ver los resultados de aplicar los detectores de bordes clásicos y el detector basado en operadores de orden fraccionario. La Figura 1 muestra la imagen obtenida de la base de segmentación de Berkeley. Esta base se está convirtiendo en una importante referencia para probar algoritmos de segmentación de imágenes de color,

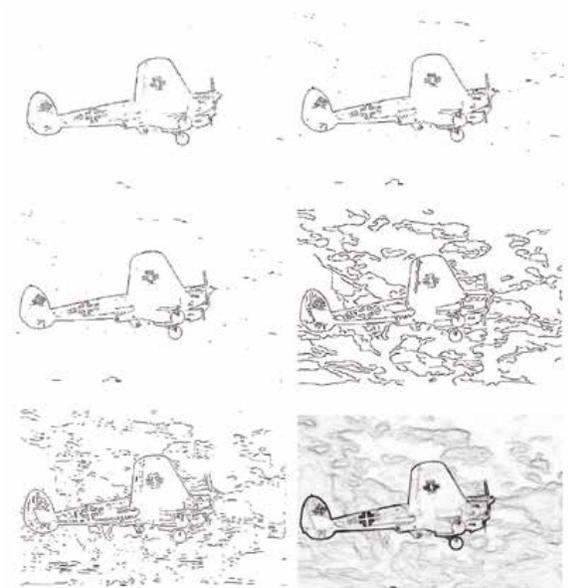


FIGURA 2. EN las figuras se tiene la detección de bordes aplicando los operadores diferenciales de Roberts, Prewitt, Sobel, Canny, Laplaciano del Gaussiano y el detector de bordes fraccionario, respectivamente.

esta base de imágenes contiene 200 imágenes para entrenamiento y 100 más para realizar pruebas. El uso de esta base permite estandarizar y con ello calificar la eficiencia del algoritmo propuesto.

En la Figura 2 se muestra el resultado de aplicar el operador de Roberts, Prewitt, Sobel, el algoritmo de Canny, Laplaciano del Gaussiano y el detector de bordes fraccionario, respectivamente. En estos resultados se puede apreciar para el caso clásico que no sólo los bordes sino también las texturas no están definidas, a diferencia del caso fraccionario donde se pueden ver con más claridad los bordes y las texturas de la imagen.

Como puede verse en comparación con la Figura 1, la mejor detección se logra con la aplicación del detec-

tor de bordes fraccionario ya que no solo es posible ver con claridad la silueta del avión, sino que además se pueden distinguir claramente otras características como los contornos de las nubes (bordes débiles) con más precisión y claridad. Esto permite reducir la cantidad de datos a ser procesados y con ello filtrar la información que puede ser considerada como menos relevante conservando las propiedades estructurales de una imagen.

Detección de imágenes en la biomedicina

Una importante aplicación de la detección de bordes en imágenes biomédicas consiste en delimitar las áreas de interés y determinar la dimensión fractal. El análisis fractal se aplica ampliamente para estudiar las características de una imagen. Sin embargo, en la mayoría de estas

aplicaciones el interés común es determinar la dimensión fractal de un objeto por la información sobre su estructura geométrica, una manera común de hacerlo es usar el algoritmo de conteo de cajas, mediante el cual es posible calcular la dimensión fractal en un área determinada. Este algoritmo consiste en sobreponer una cuadrícula sobre la imagen a medir. Cada cuadro que compone la cuadrícula se le denomina caja y determina un tamaño de área del objeto a medir dentro de la imagen. A medida que el tamaño de las cajas se aproxima a cero, el área total cubierta por las cajas convergerá a la medida deseada.

En la Figura 3 se puede observar el resultado obtenido de usar el detector de bordes fraccionario y se puede apreciar como resalta las áreas de interés de las imágenes biomédicas (en este caso el pseudoquiste pancreático) para después aplicar el algoritmo de conteo de cajas y calcular el área del tumor. El área del tumor reportada por los médicos especialistas es de 4 cm² mientras que el área que se obtuvo al aplicar el detector de bordes fraccionarios y el algoritmo de conteo de cajas fue de 4.2 cm², cabe recordar que los médicos generalmente pueden conocer el área de ciertos tumores mediante su extracción (por medio de cirugía) o con equipos especializados costosos y/o invasivos para el paciente, mientras que en la propuesta que desarrollamos solo necesitamos de una imagen simple y la aplicación del detector de bordes fraccionario para resaltar contornos fuertes, seleccionar el área de interés y finalmente aplicar el algoritmo de conteo de cajas para obtener una medición bastante cercana a la medición real.

Este tipo de técnica se puede aplicar al estudio de diferentes imágenes de naturaleza médica, como pueden ser: coágulos, estenosis, cálculos biliares o incluso en la medición de órganos, por ejemplo, para detectar cardiomegalia (aumento anormal del volumen del corazón).

Como se ha visto, el cálculo diferencial e integral de orden arbitrario tiene grandes aplicaciones, con lo que se demuestra que la investigación en nuevas disciplinas dentro del área de las matemáticas, puede llevar a aplicaciones revolucionarias en otras áreas de la ciencia y tecnología.

Esta columna se prepara y edita semana con semana, en conjunto con investigadores morelenses convencidos del valor del conocimiento científico para el desarrollo social y económico de Morelos. Desde la Academia de Ciencias de Morelos externamos nuestra preocupación por el vacío que genera la extinción de la Secretaría de Innovación, Ciencia y Tecnología dentro del ecosistema de innovación estatal que se debilita sin la participación del Gobierno del Estado.

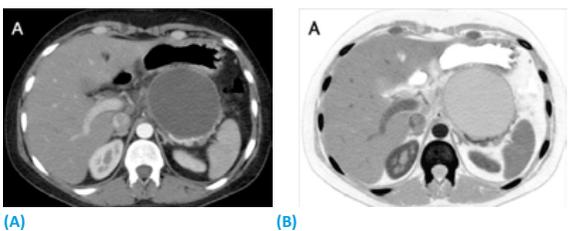


FIGURA 3. (A) Imagen que presenta la tomografía computarizada de una mujer de 24 años con un pseudoquiste pancreático de 10 x 10 x 9 cm. (b) Imagen obtenida al aplicar el detector de bordes fraccionario con un orden de 0.6.

Formulario para Cálculo Integral

i. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$	xvi. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
ii. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	xvii. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \ln\left \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right + C$
iii. $\int dx = x + C$	xviii. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
iv. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	xix. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
v. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	xx. $\frac{d}{dx} \ln \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$
vi. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$	xxi. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
vii. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	xxii. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln x + \sqrt{a^2 + x^2} + C$
viii. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$	xxiii. $\int dx = x + C$
ix. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	xxiv. $\int \sqrt{a^2 - u} du = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - u} + \frac{2}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - u}}{a}\right) + C$
x. $\int \cos x dx = \sin x + C$	xxv. $\int dx = u + v = \int u du + \int v dv$
xi. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	
xii. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	
xiii. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	
xiv. $\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + C$	
xv. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln\left \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right + C$	
xvi. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \ln\left \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right + C$	

Substituciones Trigonométricas

$\sqrt{a^2 - x^2}$	\rightarrow húgase
$u = a \sin z \rightarrow a \cos z$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	\rightarrow húgase
$u = a \tan z \rightarrow a \sec z$	
$\sqrt{a^2 - x^2}$	\rightarrow húgase
$u = a \sec z \rightarrow a \tan z$	

I. Equations of Fractional Order, Springer Verlag, 1997.
nsamiento Matemático, 4(1), (2014), 77-105.
de energía en la propagación de ondas sísmicas, Asoc. Arg. Mec. Compu. 31(39), (2010), 3671-3681.
System and Controls, Springer, 2010.
s of differentiation and integration to arbitrary order, 111, Elsevier, 1974.
mented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring eco-
2001, pp. 416-423.

H. Vera, G. Elva, D. Tovar, C. Hernán, T. Duany Díaz, A. Valdés Martín, L. González González, Y. López Piñero. Estenosis aórtica basada en la evidencia" Revista Cubana de Cardiología y Cirugía Cardiovascular, vol. 24, no. 1, 2018.
Instituto Mexicano del Seguro Social. El instituto mexicano del seguro social alcanza una reducción de la mortalidad del 86% en pacientes con estenosis aórtica crítica, <https://codigof.mx/institutomexicano-del-seguro-social-alcanza-una-reduccion-la-mortalidad-del-86-en-pacientes-estenosis-aortica-critica> 2017.