

Los zumbidos y las Ciencias Exactas

Dr. W. Luis Mochán, Instituto de Ciencias Físicas UNAM
 Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos

Era de noche, me hallaba sumergido en su silencio y obscuridad. Dormía profundamente cuando empezó el zumbido, fuerte, penetrante, agudo. Imposible continuar. Adormilado prendí la luz; volvió el silencio y ni rastro de mi visitante. La apagué. El sonido volvió de inmediato, más fuerte que antes. Se detuvo. Un cosquilleo en mi oído provocó un reflejo; me golpeé la cabeza. Otra vez el ruido, pero acompañado de otro, como una trompetilla, más agudo aún. Volví a prender la luz. Otra vez silencio, roto abruptamente por un zumbido grave. Esta vez lo pude ver, dando vueltas al foco y golpeando la pared. Un coleóptero. Recordé, la ventana se quedó abierta toda la tarde; seguramente, la casa estaría llena de mosquitos al acecho. Resignado, me levanté, preparé un té y me senté a reflexionar. Ahuyentado el sueño, fui víctima de mi deformación profesional. Siendo físico, mi trabajo es hacer preguntas y, en algunas ocasiones, contestarlas. ¿Por qué el sonido del mosquito es agudo? ¿Por qué el del escarabajo es grave? ¿Por qué el de la mosca es intermedio, ni tan agudo ni tan grave? ¿Qué determina el tono del zumbido de un insecto? Desde luego, hay diferencias notables entre los insectos. Los coleópteros tienen boca dispuesta para masticar, caparazón consistente y dos élitros córneos que cubren dos alas membranosas mientras que los mosquitos son dípteros de cuerpo cilíndrico con dos antenas, dos palpos en forma de pluma y una trompa recta [Diccionario de la lengua Española de la Real Academia, 22a ed.]. Pero ¿cuales diferencias son circunstanciales y cuales son esenciales para entender el tono del zumbido? Seguramente, Ud. sospecha la respuesta: *el tamaño*.

La experiencia nos muestra que los insectos pequeños producen sonidos más agudos al volar que los grandes. La nueva pregunta ¿cómo depende del tamaño el tono, la frecuencia del sonido? Aquí podríamos proceder de varias maneras. Una de ellas consistiría en hacer experimentos: reunir muchos insectos de diversas especies y/o muchos insectos de la misma especie pero de distintas edades y tamaños, registrar sus medidas y su peso, motivarlos a volar en algún tipo de ambiente confinado donde podamos grabar el sonido que producen. Posteriormente, podríamos desplegar el

sonido grabado en un osciloscopio y hacerle un análisis espectral para hallar las frecuencias dominantes que lo componen, dibujar gráficas para buscar correlaciones entre las distintas mediciones realizadas, proponer expresiones matemáticas que capturen la esencia de dichas correlaciones y hacer regresiones estadísticas para minimizar los errores entre dichas expresiones empíricas y las observaciones, obteniendo así los mejores valores para los coeficientes que aparezcan en las fórmulas, etc.

La otra forma de proceder, más viable en el transcurso de una noche de desvelo y más acorde a mi formación teórica, consiste en la elaboración de un modelo. Veamos. ¿Por qué se sostiene un insecto en el aire? Sabemos que los insectos tienen masa y que todas las masas son atraídas hacia el centro de la tierra por la fuerza de la gravedad

$$F_g = mg$$

donde

$$m$$

es la masa y

$$g \approx 10^3 \text{ cm/s}^2$$

es la *aceleración de la gravedad* en la superficie de la tierra donde

$$10^3$$

significa un 1 seguido de 3 ceros, i.e., 1000.

La masa del insecto es igual a su densidad (masa por unidad de volumen)

$$\rho_i$$

multiplicada por su volumen. Podemos aproximar la densidad de un insecto por la densidad del agua

$$\rho_i \approx 1 \text{ gr/cm}^3$$

de la cual se componen mayoritariamente todos los seres vivos y podemos aproximar su volumen por su largo x alto x ancho

$$\approx L \times L \times L = L^3$$

es su *tamaño*.

Más adelante discutiré sobre el uso de aproximaciones burdas como éstas, conocidas genéricamente dentro del gremio como *aproximaciones de elefantes esféricos*. Resumiendo, (ecuación 1)

$$F_g \approx \rho_i L^3 g$$

Si el insecto no cae es porque es sujeto a una fuerza igual y opuesta, la fuerza que ejerce el aire sobre las alas. De acuerdo a la *tercera ley de Newton*, esta última es igual y opuesta a la fuerza

$$F_a$$

que ejercen las alas sobre el aire. Por lo tanto, la fuerza gravitacional

$$F_g$$

que ejerce la tierra sobre el insecto debe ser igual a la fuerza

$$F_a$$

que ejercen las alas sobre el aire. De acuerdo a la *segunda ley de Newton*, la fuerza es igual al cambio de su ímpetu por unidad de tiempo, por lo cual debemos analizar el ímpetu (es decir, masa por velocidad) que adquiere el aire debido al batir de las alas.

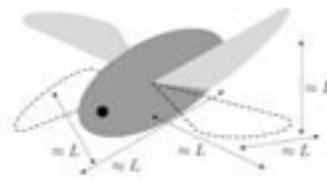


Figura 1: Visión esquemática de un insecto volador, según un físico. Se muestran las alas en su posición superior. Con una línea punteada se muestra también su posición inferior. Se indican las distancias relevantes, tales como la longitud y el ancho del cuerpo, el largo y el ancho de las alas y la distancia que recorren entre su posición superior y su posición inferior. Todas estas distancias se consideran aproximadamente iguales entre sí e iguales al *tamaño L* del insecto.

En un aleteo la superficie del ala se mueve una cierta distancia, barriendo cierto volumen (Fig. 1) ¿Cuánto mide dicho volumen? El tamaño del ala es *del orden* del tamaño

$$L$$

del insecto, por lo cual su área es del orden de

$$L \times L = L^2$$

La distancia recorrida durante un aleteo no es ni mucho más grande ni mucho más pequeña que

$$L$$

por lo cual el volumen barrido es del orden del área x recorrido

$$\approx L^2 \times L = L^3$$

Llamando

$$\rho_a \approx 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$$

a la densidad del aire, la masa de aire barrida por un aleteo es del orden de

$$\rho_a L^3$$

Cada vez que el insecto aletea, esta masa se mueve una distancia del orden de

$$L$$

por lo cual la velocidad que adquiere es del orden de

$$L/T = Lv$$

Donde $T = 1/\nu$

es el tiempo que tarda cada aleteo y ν

es el número de aleteos por unidad de tiempo, es decir, la frecuencia del aleteo y por lo tanto del zumbido que genera. Luego, el ímpetu que adquiere el aire en un aleteo es del orden de

$$\rho_a L^4 \nu$$

Habiendo

$$\nu$$

aleteos por unidad de tiempo, el ímpetu que adquiere el aire por unidad de tiempo es

$$\rho_a L^4 \nu^2$$

Como discutimos arriba, éste es igual a la fuerza que las alas ejercen sobre el aire,

$$F_a \approx \rho_a L^4 \nu^2$$

y por lo tanto es igual a la fuerza que la gravedad ejerce sobre el insecto.

Igualando

$$(ecuación 2) \quad F_g = F_a$$

y empleando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$\rho_a L^4 \nu^2 \approx \rho_i L^3 g$$

de donde despejamos

$$\nu \approx \sqrt{\frac{\rho_i g}{\rho_a L}} \approx \frac{10^3}{\sqrt{L}} \text{ Hz cm}^{1/2}$$

La última expresión en la ecuación (3) nos proporciona la frecuencia

$$\nu$$

en Hertz (número de oscilaciones o aleteos por segundo) cuando sustituimos el tamaño

$$L$$

en centímetros.

Ilustremos los resultados anteriores aplicándolos a un mosquito. Su tamaño es de aproximadamente 2mm=(1/5)cm, por lo cual la frecuencia de su zumbido puede calcularse como

$$\nu \approx 10^3 / \sqrt{1/5} \text{ Hz} \approx 2000 \text{ Hz}$$

Si desea saber cómo suena esta frecuencia, pulse en un piano la tecla *do* que se halla tres octavas arriba del *do* central; si no sabe cómo, consiga a algún amigo pianista. Hice la prueba y me parece que sí corresponde al tono de un mosquito (aunque el *timbre* del piano es muy distinto). En cambio, un escarabajo de 3cm haría un ruido con una frecuencia

$$\nu \approx 10^3 \sqrt{0.3} \text{ Hz} \approx 550 \text{ Hz}$$

poco más agudo que el *do* que sigue del *do* central. El lector interesado podría aplicar el resultado a otros insectos de su interés para predecir su sonido. Incluso, podría ir más allá y aplicar esta expresión a otros seres voladores tal y como el colibrí. El resultado podría emplearse al revés, para estimar el tamaño de un insecto a partir del sonido que produce. Quiero enfatizar que en la deducción previa empleé el símbolo *aproximadamente igual*

$$\approx$$

en varias ocasiones, en lugar de haber empleado el símbolo *igual* (=). Ello obedece a que el ejercicio anterior corresponde a una estimación de la frecuencia del zumbido y no a un *cálculo*. Por una parte, en la estimación se llevaron a cabo una serie de aproximaciones. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad se tomó como

$$1000 \text{ cm/s}^2$$

y no como los 981 reportados en los libros de texto. La densidad del aire se aproximó como

$$10^{-3} \text{ gr/cm}^3$$

en lugar de emplear un valor más preciso como

$$1,204 \times 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$$

Esto introdujo errorcillos menores en el cálculo los cuales quizás no valdría la pena ni siquiera intentar corregir. Entre otros motivos, usar números como el 1.204 de arriba sería una quimera, pues la densidad exacta del aire depende de su temperatura, de la humedad y de la altura sobre el nivel del mar; pretender una precisión exagerada en un cálculo que se aplicará a experimentos poco controlados es, al menos, irrisorio. Desconfíe de quien le presente resultados con más *dígitos significativos* que la precisión alcanzable; probablemente sea alguien que no entienda de lo que habla. Por otra parte, se realizaron otro tipo de aproximaciones mucho más fuertes. Por ejemplo, ignoramos el hecho de que los insectos tienen una geometría compleja que no puede caracterizarse completamente en términos de un sólo *tamaño*

$$L$$

De la misma manera, ignoramos el hecho de que la longitud de las alas puede ser muy distinta al tamaño del cuerpo, que su geometría es compleja y que su movimiento no es un desplazamiento rígido. Asimismo, ignoramos que la velocidad del ala no es una constante y, peor aún, ignoramos que el ala se mueve de abajo hacia arriba además de moverse de arriba hacia abajo, por lo cual la eficiencia con la que se im-

ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.



La Ciencia, desde Morelos para el mundo

parte ímpetu al aire es menor al 100%. No debería sorprendernos que al aplicar la ecuación anterior a un insecto específico encontremos grandes errores; quizás nuestra estimación arroje un número dos o tres veces mayor o menor que el real. Dicha clase de errores podría corregirse reescribiendo nuestro resultado como

$$v = \alpha \sqrt{(\rho_i / \rho_a) g / L}$$

Donde α es algún número adimensional que esperamos sea de orden uno y que capture los efectos de la geometría específica y de las propiedades mecánicas y aerodinámicas del tipo de insecto que estudiemos. El cálculo de

α

sería una tarea bastante complicada, aunque su determinación experimental sería relativamente simple siempre y cuando la fórmula anterior se cumpla.

Nuestra estimación puede resumirse diciendo que para insectos de una especie dada debe haber una relación inversamente proporcional entre la frecuencia del zumbido que producen y la raíz cuadrada de su tamaño, es decir, el producto

L^2

debe ser aproximadamente constante para todos los individuos de especies con una geometría similar. El valor de la constante podría ser un parámetro numérico útil para caracterizar a dicha especie. Los lectores familiarizados con la ingeniería o con la física sabrán que este resultado podría haberse obtenido de manera mucho más sencilla, sistemática y directa empleando una técnica conocida como análisis *dimensional*. Debo confesar que no he hecho ningún experimento para intentar verificar la expresión anterior ni he consultado la literatura científica para indagar su validez. Éste sería un proyecto interesante, quizás para algún estudiante de nivel medio. Siempre es mejor realizar un experimento cuando ya hemos desarrollado un modelo, aunque sea simplista, de lo que esperamos obtener. Parafraseando a J. A. Wheeler en su libro *Spacetime Physics*, es un imperativo moral *adivinar* cual será el resultado de un experimento o de un cálculo detallado antes de realizarlo. De acertar habremos fortalecido nuestra intuición; de no hacerlo, habremos obtenido una lección. Por ejemplo, si aplicáramos nuestra teoría a un ave como un águila, seguramente nuestra teoría fallaría. Ello indicaría que algo importante del vuelo de las aves ha escapado a nuestro análisis. En efecto, la fuerza que sostiene a las aves en vuelo proviene mayormente no de la masa de aire des-

plazada al aletear sino de la *fuerza de sustentación* que a su vez proviene del movimiento del ave a través del aire. Para seres voladores muy pequeños aparecería otra fuerza que no hemos tomado en cuenta aquí: la viscosidad. Realicé una pequeña estimación, en el espíritu de la ilustrada en este artículo

y obtuve que esta sería dominante sólo en seres voladores microscópicos, de alrededor de 10 micras de tamaño o menos. Por lo tanto, me sorprendería que la relación obtenida arriba fallara en insectos. Sin embargo, si así fuera, seguramente podríamos aprender algo nuevo de sus fallas.

La *Física* es conocida como una *Ciencia Exacta*. Lo que quise mostrar en este pequeño artículo es que en muchas ocasiones la física se emplea para realizar estimaciones aproximadas, caricaturas de la realidad, en lugar de cálculos exactos. En muchas ocasiones estas estimaciones nos conducen

de manera rápida a un entendimiento más profundo de nuestra realidad, como intenté ilustrar con un ejemplo tan modesto como el zumbido de los mosquitos.

Los mosquitos los envió Dios para enseñarle humildad al hombre...y un poco de física.

A NUESTROS LECTORES:

Problemas técnicos derivados de la conversión de archivos de su formato original alteraron algunas de las fórmulas y ecuaciones en el artículo publicado la semana pasada. Por la importancia de que sea debidamente comprendido, lo reproducimos nuevamente con las correcciones necesarias.

LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS EN CONJUNTO CON EL DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA Y BIQUÍMICA DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ZACATEPEC SE COMPLACEN EN INVITAR A



UN ENCUENTRO CON LA QUÍMICA

11 DE SEPTIEMBRE DEL 2008

PROGRAMA

Bienvenida	Ing. Jorge Aceves Jimenez Director del Instituto Tecnológico de Zacatepec
Presentación	Dr. Enrique Galindo, Presidente de la Academia de Ciencias de Morelos.
Conferencia	Dr. Filiberto Vazquez Dávila, Ganador del Premio Nacional de Ciencias y Artes en el 2001 y del Premio Nacional de Química 2006
Experiencias	Maestros y Alumnos participantes de la Olimpiada de Química
	Intervenciones del público y debate abierto con los participantes.

COMITÉ ORGANIZADOR

Dr. Jorge Uruchurtu	Ing. Leonel Gutiérrez Uribe Coordinación De Transporte
M.E.M. Luis Alberto Arau Roffiel Coordinación General	M.C. Wendy Netzy Hernández Díaz Coordinación De Comunicación
M.E.M. Deyanira Ochoa Vazquez Coordinación De Vinculación	Ing. Jose Luis Morales Pineda Coordinación Academico
M.J.L. Homero Alonso Jiménez Coordinación De Finanzas	

INFORMACIÓN

Responsable ITZ: M.E.M. Luis Alberto Arau Roffiel
Tel: (734)-34-321-10 Ext: 239
E-mail: laraur@yahoo.com.mx

Responsable ACMor: Dr. Jorge Uruchurtu
Tel: (777)-329-70-00 Ext: 6230
E-mail: juch25@uaem.mx

Dirección del I.T.Z.:
Calzada Tecnológico No. 27, C.P. 62780,
Zacatepec, Morelos, A. Postal No. 45;
Tel. (01 734) 3431394, 3430723, 3432110, 3432111 Ext 239;
Fax (01 734) 3434141; www.itzacatepec.edu.mx

10:00 am a 12 pm

Auditorio del ITZ

ENTRADA LIBRE

Para actividades recientes de la Academia y artículos anteriores puede consultar:
www.acmor.org.mx