

Construcción de Cuadrados Mágicos (usando los métodos de Hire y Durero)

Radmila Bulajich
 Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos
 Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos

La semana pasada (ver: www.acmor.org.mx/descargas/09_sept_07_cuadrados.pdf) publicamos una forma de construir cuadrados mágicos de orden impar. Primero recordemos qué es un cuadrado mágico. Un cuadrado mágico es un arreglo de N^2 casillas, donde N representa un entero positivo mayor o igual a 3, en el cual en cada una de las casillas encontramos un número entero distinto. La palabra mágico se refiere a que la suma de los números en cada renglón, cada columna o en las dos diagonales principales, es la misma. Además, veamos a qué nos referimos cuando hablamos de cuadrados mágicos de ORDEN IMPAR, PAR SENCILLO y DOBLEMENTE PAR.

1. Cuadrados mágicos de ORDEN IMPAR, son los cuadrados mágicos donde N es un número impar, es decir, de la forma $2m+1$, donde m es un entero positivo.
2. Cuadrados mágicos de orden par, que llamamos PAR SENCILLO, donde N es de la forma $2(2m+1)$, donde m es un entero mayor o igual a 0, es decir, el doble de un número impar. Observemos que los números que generamos aquí son los números pares que son divisibles entre 2 pero no entre 4.
3. Cuadrados mágicos cuyo orden es doblemente par, que llamamos DOBLE PAR, donde N es de la forma $2(2m)$, para m un entero, es decir, el doble de un número par. El número de cuadraditos en cada uno de los lados de los cuadrados se pueden dividir entre 2 y 4.

Ahora describimos algunos métodos para construir cuadrados mágicos de orden par sencillo y doblemente par, los cuales fueron desarrollados por Phillippe Hire y por Alberto Durero.

Método de Phillippe Hire

El matemático francés Phillippe Hire (1640-1719) creó el método para llenar cuadrados mágicos de orden par sencillo. Él hace uso de dos cuadrados, que llamaremos A y B, y al sumar el número de cada uno de los cuadraditos respectivos obtenemos el cuadrado mágico.

Veamos cómo construir un cuadrado mágico de orden 6. En el cuadrado A (de la FIGURA 1) llenamos la diagonal con los números del 1 al $N=6$, empezando por una diagonal en el cuadradito superior derecho y para la otra en el cuadradito inferior derecho, es decir, empezamos a llenar las diagonales iniciando en el lado derecho del cuadrado. Todos los cuadraditos que quedan vacíos en la primera columna se llenan con el 6 o su complemento (el número 1), como queramos. Aquí, la palabra complemento de un número se refiere al número $N-x+1$. Así, por ejemplo, el complemento del 6 es $6-6+1=1$, el complemento del 5 es el $6-5+1=2$. Lo que tenemos que cuidar es que siempre haya el mismo número de unos que de seis.

Ya que llenamos la primera columna, llenamos la sexta con

el complemento de lo que tenemos en la primera. Para completar la segunda y quinta columna colocamos números 5 o su complemento (el 2) respetando la misma regla, y así sucesivamente.

Llenamos el cuadrado B (de la FIGURA 1) de forma análoga solamente que ahora los enteros que colocamos son $0, N, 2N, 3N, \dots, N(N-1)$, donde N representa el número de renglones o columnas del cuadrado que estemos llenando, en este caso $N=6$. Llenamos las dos diagonales principales con estos números pero ahora iniciando en los extremos superior izquierdo y derecho, es decir, llenamos las diagonales iniciando en el lado superior del cuadrado. En los cuadraditos que quedan, acomodamos estos números utilizando las mismas reglas que para el cuadrado A, pero ahora iniciamos con el renglón superior e inferior. Luego, el segundo renglón y el penúltimo, y así sucesivamente.

Finalmente sumamos los cuadrados A y B para obtener el cuadrado mágico C (ver FIGURA 1). Observemos que aquí el número mágico es $(1+2+\dots+36)/6=6(36+1)/2=111$.

6	2	3	4	5	1	0	30	0	30	0	0	6	32	3	34	35	1
1	5	3	4	2	6	6	6	24	24	6	24	7	11	27	28	8	30
1	2	4	3	5	6	18	12	12	12	18	18	19	14	16	15	23	24
6	2	4	3	5	1	12	18	18	18	12	12	18	20	22	21	17	13
1	5	4	3	2	6	24	24	6	6	24	6	25	29	10	9	25	12
6	5	3	4	2	1	30	0	30	0	0	30	36	5	33	4	2	31
A	B	C															

Figura 1.

El método de la Hire se puede utilizar para construir cuadrados que sean doblemente pares. Veamos (en la FIGURA 2) el ejemplo de un cuadrado mágico de 4×4 .

4	2	3	1	0	12	12	0	4	14	15	1
1	3	2	4	8	4	4	8	9	7	6	12
1	3	2	4	4	8	8	4	5	11	10	8
4	2	3	1	12	0	0	12	16	2	3	13
A	B	C									

Figura 2.

Algunos autores han utilizado variaciones de este método para llenar cuadrados de cualquier orden, pero para llenar cuadrados de orden impar se tiene que cambiar la forma de llenar los cuadrados A y B, ya que el método descrito arriba no funciona para cuadrados de orden impar.

Método de Alberto Durero

El cuadrado mágico de Alberto Durero (ver: www.acmor.org.mx/descargas/08_mar_24_durero.pdf; www.acmor.org.mx/descargas/08_mar_31_durero.pdf) se puede llenar utilizando el método (de Hire) que acabamos

de describir. Sin embargo, no fue el que usó el autor. Alberto Durero creó su propio método para construir cuadrados mágicos doblemente pares.

Veamos como construir el cuadrado 4×4 . Una variación de esta forma de llenar cuadrados funciona para cualquier cuadrado doblemente par. Colocamos el número 1 en el cuadradito inferior izquierdo (ver parte izquierda de la FIGURA 3). Ahora, imaginamos que vamos colocando los números consecutivos en el renglón inferior pero únicamente escribimos los números que ocupan un cuadradito de la diagonal. Así en el renglón inferior tendremos únicamente el 1 y el 4, *estos pueden estar acomodados de izquierda a derecha o viceversa*. Continuamos al siguiente renglón, de abajo hacia arriba, y podemos iniciar en el lado izquierdo o derecho del cuadrado, como queramos. Sin embargo, si en el primer renglón se hizo de izquierda a derecha en todos los subsecuentes se hará de la misma forma, es decir, de izquierda a derecha, hasta colocar el resto de los números. Por ejemplo, el primer número (de izquierda a derecha) del segundo renglón debería ser un 5 (que no escribimos) y el siguiente (que pertenece a la diagonal) es el 6, y así sucesivamente, hasta que lleguemos al renglón superior. El último cuadradito que llenamos tiene el número 16 en la esquina superior derecha.

Para terminar de construir el cuadrado mágico haremos lo mismo pero ahora iniciando en el último cuadradito que llenamos. En este caso, la esquina superior derecha con el número 1 (que no escribimos) y escribiendo únicamente los números que no pertenecen a la diagonal. Así colocamos el 2, junto al 16, el 5 junto al 11 y así sucesivamente, como se muestra en la parte derecha de la FIGURA 3.

13			16	13	3	2	16
	10	11		8	10	11	5
	6	7		12	6	7	9
1			4	1	15	14	4

Figura 3.

Una variación de este método se puede utilizar para llenar todos los cuadrados doblemente pares. Sin embargo, el método no se aplica directamente, sino que hay que dividir el cuadrado en subcuadrados de 4×4 cuadraditos y marcar la diagonal de cada uno de estos subcuadrados, como se muestra a continuación (FIGURA 4):

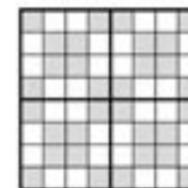


Figura 4.

ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.



Retrato de Philippe de la Hire



Una vez hecho esto, se empiezan a distribuir los números igual que antes pero se escriben todos aquellos números que pertenecen a alguna de las diagonales de un subcuadrado de 4X4 (los cuadraditos coloreados). Una vez que llegamos a una de las esquinas del cuadrado, iniciamos el proceso en sentido inverso, en ese mismo cuadradito, pero ahora llenando todos los cuadraditos que no pertenecen a ninguna de las diagonales de los subcuadrados de 4X4 cuadraditos. ¡Inténtalo en el cuadrado de 8X8!, el número mágico es:

$$260 = \frac{1+2+\dots+64}{8} = \frac{64 \cdot 65}{8}$$

Comentarios: bulajich@uaem.mx



Pintura de Alberto Durero



Diplomado Pensamiento científico en el aula



ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

Este Programa tiene como objetivo la **actualización y capacitación en Ciencias para los profesores de Secundaria y Preparatoria/Bachillerato del Estado de Morelos. Las sesiones son impartidas por científicos de primer nivel en los Institutos y Centros de Investigación de la UNAM Campus Morelos (Cuernavaca).**

Acreditación por parte de la Academia de Ciencias de Morelos y la Secretaría de Educación del Estado de Morelos, con valor escalafonario. Certificado por la Secretaría del Trabajo y Previsión Social (Nº ACM- 930330-RW2-0013).

Inicio del Diplomado: Septiembre de 2009

Más información: almadcaro@yahoo.com.mx

Tel: 3 11 08 88 y Cel: 777 15 57 221

Módulos

Se imparten en forma intercalada:

Biología, Física, Matemáticas, Química e Historia de las Ideas Científicas.

Plan de trabajo

- Semiescolarizado y sabatino.
- Horario de 9:00 a 13:00 horas - Secundaria.
10:00 a 14:00 horas - Preparatoria/Bachillerato.
- Se realizarán conferencias especializadas para docentes y conferencias de divulgación para todo público.
- Se llevarán a cabo proyectos de investigación por los profesores con participación de sus alumnos.

Las instalaciones están ubicadas dentro del Campus de la UAEM.

Secundaria-Auditorio del Instituto de Biotecnología, UNAM. De 9-13hrs.

Preparatoria/Bachillerato- Auditorio del Centro de Ciencias Genómicas, UNAM. De 10-14 hrs.