ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

La Ciencia, desde Morelos para el mundo

La Proporción Aurea o lo que tienen en común los pentágonos, el nautilus y la cría de conejos

(Primera Parte)

Federico Vázquez
Profesor-Investigador de la Facultad de Ciencias, UAEM
Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos

¿Quién no conoce el significado del número pi (π)? Digamos que el valor de pi (3.14159…) es la proporción de la circunferencia de cualquier círculo con relación a su diámetro. Esta definición pertenece al campo de la geometría pero el número pi aparece también, y frecuentemente, en el cálculo de probabilidades. A diferencia de pi, fi (ϕ) es otro número mucho menos conocido que pi, pero mucho más misterioso pues aparece en situaciones tan disímbolas como lo pueden ser: la disposición de los pétalos de una rosa, las conchas espirales de los moluscos o la cría de los conejos. Fi ha recibido la atención de innumerables mentes matemáticas desde tiempos de la Grecia Antigua hasta nuestros días. Ha ejercido una gran fascinación no sólo en el mundo de las matemáticas sino que también entre los biólogos, los artistas, los músicos, los arquitectos y los psicólogos por su ubicuidad. Fue hasta el siglo XIX que fi recibió los nombres con los que se le conoce en la actualidad: "número áureo", "proporción áurea" y "sección áurea". Antes de pasar a la definición precisa de fi, recordemos que la palabra "proporción" se utiliza para definir la relación comparativa que existe entre las partes de un todo en referencia a su tamaño o bien a su cantidad. La palabra "proporción" se utiliza en frases de uso común como por ejemplo: "fulanita tiene un rostro bien proporcionado", la cual significa simplemente que la relación que guardan la altura de su rostro y el ancho es agradable. Curiosamente, el rostro de una persona resulta más agradable cuanto la proporción de su alto a su ancho se acerca más a la proporción áurea. Es interesante mencionar que en general a la proporción áurea se le atribuyen cualidades armónicas que producen placer. Aquí es el lugar adecuado para decir que el valor de la proporción áurea es el número infinito e irrepetible 1.6180339887…

La primera definición precisa de fi (la proporción áurea) la realizó el fundador de la geometría, Euclides de Alejandría, más o menos en el año 300 a.C. La proporción áurea aparece en varios pasajes de su libro *Elementos*, que es considerado por muchos la obra cumbre de Euclides olvidando a veces que fue autor de al menos una docena de libros más de igual valía. Euclides definió una proporción obtenida al dividir un segmento de línea recta en lo que llamó su "media y extrema razón". Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando la longitud del segmento completo es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor. Obsérvese la figura 1. Lo anterior significa que la relación que existe entre las longitudes de los segmentos AC y CB es la misma que existe entre las longitudes de AB y AC. En otras palabras, si se realiza la división de las longitudes de los segmentos AB y AC resultará el número 1.6180339887…, lo mismo que si hacemos la de AC y CB.

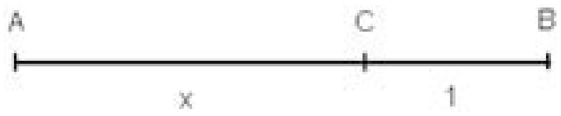

Figura 1.

Esto último se puede representar por la ecuación:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Lo que hace tan atractiva a la proporción áurea (el número 1.6180339887…) es su inexplicable presencia en donde menos se le espera. Piense en una simple manzana por ejemplo. Córtela por su circunferencia. Observará que las semillas están ordenadas formando una estrella de cinco puntas o pentagrama (figura 2).

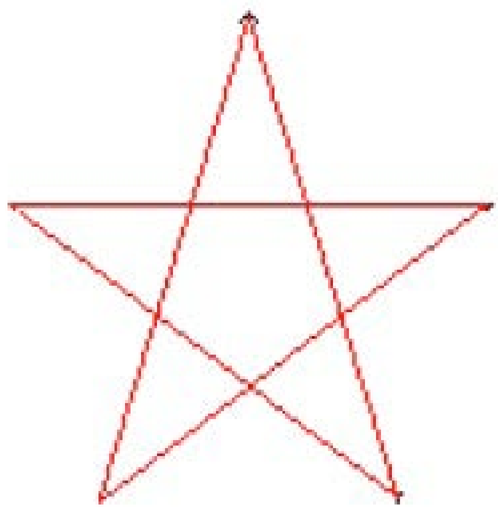

Figura 2.

¿Dónde está fi? Resulta que cada uno de los triángulos isósceles que forman las esquinas del pentagrama tiene una propiedad sorprendente: la proporción de la longitud de su lado más largo (en realidad tiene dos de estos) con relación al más corto (que sería la base del triángulo, dibujada con línea punteada en la figura 2) es igual a 1.6180339887… ¡Con todas sus cifras decimales! Note que las puntas del pentagrama forman exactamente un pentágono. Pero he aquí que todo está relacionado. Imagine que trazamos dos diagonales adyacentes en el pentágono como se muestra en la figura 3a.

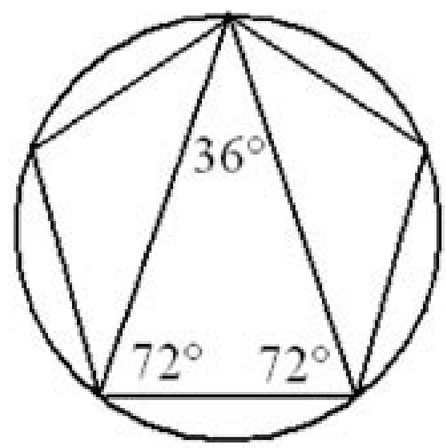

Figura 3a.

Observe que se forman tres triángulos isósceles, dos chaparritos y uno más esbelto. Es relativamente fácil demostrar que los ángulos iguales de éste último que tienen las siguientes medidas 36°-72°-72°. Si se bi-secta uno de los ángulos de 72°, como en la figura 3b, se obtiene un triángulo menor DBC con los mismos ángulos! Es decir, 36°-72°-72°. Se puede mostrar que, según la definición de Euclides, el punto C (vea la figura 3b) ¡divide al lado AB del triángulo en media y extrema razón! En consecuencia, AD/DB=1.6180339887…En otras palabras, en cualquier pentágono la proporción de la diagonal al lado es igual a ϕ.

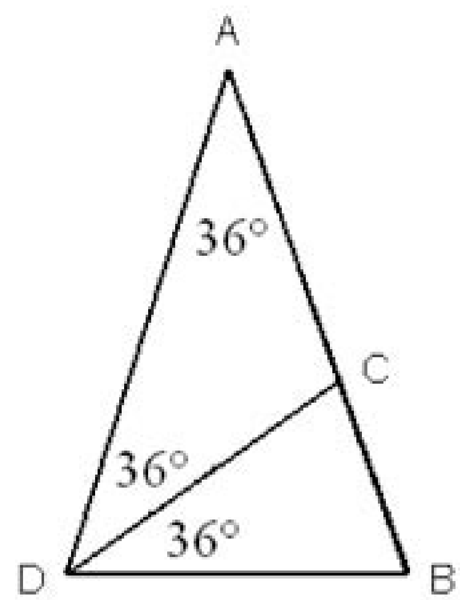

Figura 3b.

Una propiedad interesante de un rectángulo áureo (su largo dividido por su ancho es igual a la proporción áurea), que será retomada al final de este artículo, es que si se le superponen cuadrados en remolino como se muestra en la figura

ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

4, los puntos que dividen los lados del rectángulo lo hacen en media y extrema razón.

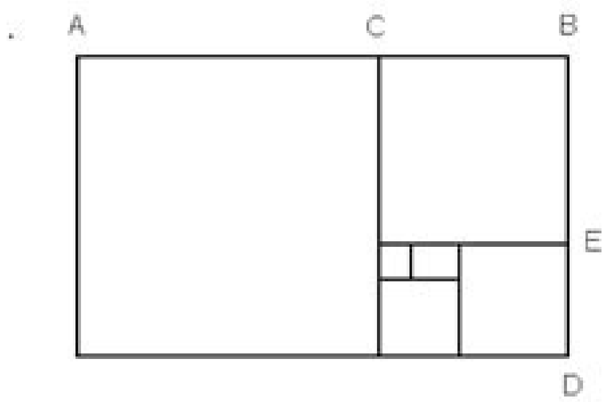

Figura 4.

Es decir, y de acuerdo con la figura,

AB/AC=BD/BE=…=1.6180339887…

Huelga decir que el trazo de los cuadrados puede continuarse hasta el infinito.

Por cierto, y hasta aquí llegan las matemáticas en este pequeño artículo, se puede obtener el valor de ϕ de la siguiente manera. Llame a la longitud mayor de un segmento dividido en media y extrema razón, con la letra x (vea la figura 1). Asigne a la longitud menor el valor de la unidad. Entonces, como el segmento está dividido en media y extrema razón debe cumplirse que:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por x , obteniendo:

.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

El valor positivo da 1.6180339887... Es decir, fi! El valor negativo da el negativo del inverso de fi.

Fi tiene propiedades sorprendentes. Por ejemplo, introduzca en una calculadora de bolsillo el número 1.6180339887 y oprima la tecla ($\{x^2\}$) ¿Nota usted algo inesperado? Introduzca de nuevo el número pero oprima ahora la tecla ($\{1/x\}$) . Sorprendido? Mientras que el cuadrado de 1.6180339887 da 2.6180339887, el inverso o recíproco da 0.6180339887. Ambos con los mismos números inmediatamente después del punto hasta la décima posición. La proporción áurea tiene las propiedades únicas; si, únicas; si!, no hay otro número que las tenga, de que su cuadrado se obtiene sumándole 1 y su inverso restándole 1.

En la segunda parte de este relato continuaremos indagando la relación de la proporción áurea con otros fenómenos y situaciones que terminarán revelando y confirmando el misterioso y maravilloso contenido de ese número extraordinario.